# 第一章 流体力学基础概念

## 1.3 速度与加速度

### 1.3.1 拉格朗日方法

**内容** 1. 流体中充满了流点 2. 需要一个确定的参考系 此处不是变量，用来区分不同的流点

**分量式** **速度** 三变量 u、v、w

**加速度**

### 1.3.2 欧拉方法

**内容** 着眼于空间点，有个别空间点运动特征得到整个流体运动的特征（如速度场）

**速度** （x,y,z不随t变化，表示流速在空间的分布，称为流场）

**均匀流场** 流场不随空间变化（V在各方向梯度为0）

**定常流场** 流场不随时间变化

**分量式**  变量即为欧拉变量

**加速度**  ，其中

**展开式** ，其中

**哈密顿算符** 故

**微商算符** **① 个别变化** 流体在运动过程中**具有的物理量**随时间的变化

**拉格与欧拉加速度之差为平流加速度**

**② 局地变化** 某一**固定空间点**上物理量随时间的变化

**③ 平流变化** 物理量**场的非均匀性**引起的变化

**微商算符常用形式** 1. 若流点具有的**物理量不随时间变化**，则

2. 若**流体具有的物理量分布均匀**，则

3. 若是**定常流场**，则

### 1.3.3 变量转换

**拉格→欧拉** ① 利用拉格朗日变量，**对t求偏导**，求得各流点流速 ② 在表达式中**消去**得欧拉变量

**例题** 已知有 有

**拉格→欧拉** ① **联立方程组积分求解** ② 消去参数

若右端有与左端不同的参数时，不可直接积分，需要变换后求解

**例题** 已知有 根据

## 1.4 迹线和流线

### 1.4.1 迹线

**定义** 流体质点的运动轨迹线

**方程** 拉格朗日变量消去参数t可得

### 1.4.2 流线

**定义** 某一固定时刻，曲线上任意一点的流速方向与该点切线方向吻合

**方程**

**例题**

1. 已知流体速度场： 求流线方程，且经过（1，1）。

一般流线方程

有

2. 已知流体运动的速度场： 求时过点（1，1）的迹线和流线。

① 先将欧拉变量→拉格朗日变量 代入

则 消去t，可得，此即迹线方程。

，则为流线方程。

根据k是否大于0，可判断流线方向（若大于0，则原点发散）

② 得到迹线方程

流线同理可消去k\t，则流线同样为

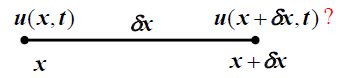
**由此例题，可表明，迹线流线重合，不能说明速度场是一个定常流场。**

此外，流线不随时间变化不能说明定常流场（）

## 1.5 速度分解

经典力学中，有 但流体运动有位置平动、形状大小、流点自身滚动旋转等运动。

**方法论** 微元分析法：从流场中任意小的流体微团出发（由大量流点构成的有线性尺度效应的微小流体块）

**泰勒展开** (高阶忽略)

考虑流体空间一点与临近一点，有距离

**x方向**

**y方向**

**z方向**

**亥姆霍兹速度分解定理** 流体微团的运动可分解为平动速度、转动线速度和变形运动引起的变形线速度三部分

上式中，*为平动*、为形变、 *为转动* **只适用于非常微小的流体微团，是局地量**

**形变率**

**流体旋转角速度**

## 1.6 涡度、散度和形变率

由于流点运动复杂性，仅仅使用速度很难刻画其全部特征，有必要引进其他物理量来表征流体特征。

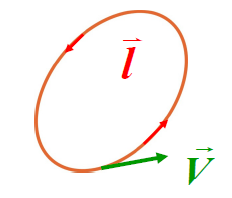
### 1.6.1 涡度

**数学定义** 定义涡度矢为矢量微商符 和速度矢 的矢性积，即

**符号**

**公式**

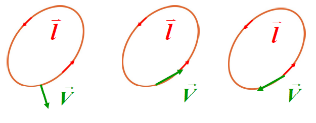
**物理意义** **速度环流** 定义：在流体中任取一闭合有向曲线，沿着沿闭合曲线对该闭合曲线上的流速分量求和：



意义：其表示流体沿闭合曲线流动趋势的程度

① 当L为流体的流线且闭合时，处处的速度矢V与线元矢量的方向一致，因此速度环流表示流体完全按L流动

② 当L闭合，若速度环流Γ为0，则流体沿着闭合曲线的分量的代数和为零

③ 当L闭合，但L不是流体的流线时，速度环流表示流体沿闭合曲线L的速度分量与相应线段的乘积的总和

转化：使用斯托克斯公式，将线积分→面积分： 为围绕面积

如果闭合曲线l无限向内收缩，则有

**意义** 流体某点的涡度矢在单位面元的法向分量＝单位面积速度环流的极限值，它是**度量流体旋转程度的物理量**

**其绝对值越大，表示旋转程度越强。一般逆时针方向为正方向。这是一个局地量**

**涡度三维分量** ，则z方向涡度分量值为

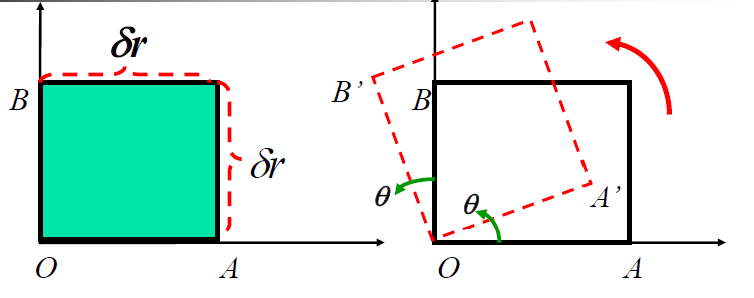
同理，x方向： y方向：

**涡度与流体旋转角速度的关系**

**关系式**

**分量式**

**推导** 对于一个二维水平运动：考虑如下条件流体运动：

 ① 没有法形变

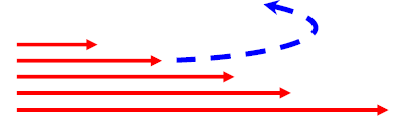
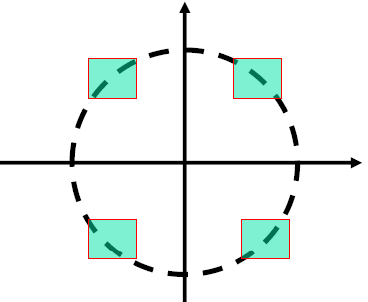
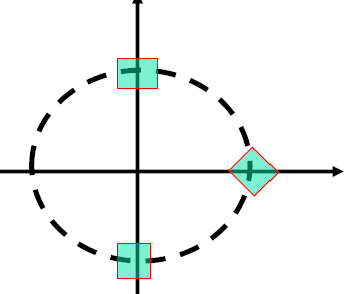
② 没有切形变

③ 流体旋转

由图可知：

有

**注意** 涡度是一个局地概念，不能理解为刚体那样的旋转运动。流体涡度表示其自转而非公转，如图所示。

直线有旋运动： 无旋圆周运动： 有旋圆周运动：

### 1.6.2 散度

**数学定义** 定义散度为矢量微商符和速度矢的数性积，即

**物理意义** **流体通量** 定义： 为流体中任一封闭曲面

转化：应用奥-高公式，将以上曲面积分转化为体积分：

当曲面面元向内无限收缩时：

**意义**：1. 欧拉观点看，**流体散度即为单位体积的流体通量**

任一封闭曲面σ为**几何面**时：

场的观点： 流体净流出（辐散（源）） 流体净流入（辐合（汇））

2. 散度也是度量**流点体积膨胀或收缩**的一个量，反映单位体积的**流点体胀速度**

**体胀速度:** 取体积的小正方体，其体积变率为

任一封闭曲面σ为流点组成的**物质面**：

体积变化观点： 封闭曲面向外膨胀 封闭曲面向内收缩

**总结**

### 1.6.3 形变率

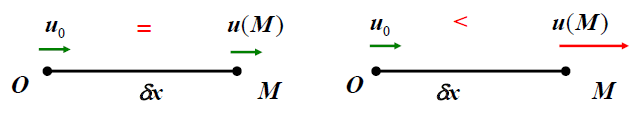
**概念** 流点可以看作既大又小的流体微团，它不但会转动和发生体积的膨胀、收缩，而且还会发生形变。

流体的形变包括：法形变（轴形变）和切形变（剪形变）

散度其实就是一种形变（体形变）。散度的三个部分分别表示了沿三个坐标轴伸长和缩短的形变率

**（1）法形变/轴形变**

**法形变率** 即单位长度的流体**速度**变化率（单位长度单位时间内的伸长和缩短率)

**定义**

**推导** 以一维运动

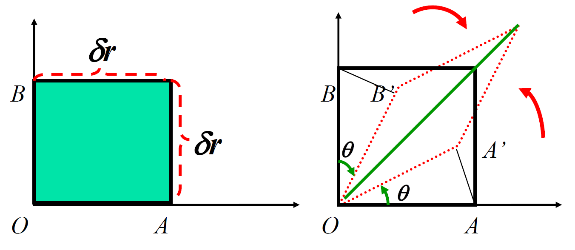
**与散度关系** 流体散度是三个方向法形变率的和，又称散度是体形变率，分别表示了沿三个坐标轴伸长和缩短的形变率，称为轴形变或法形变。

**二维平面流动**

**（2）切形变/剪形变**

**定义** 如果流点考虑成微团或立方体素，当该小体素既无体积大小变化又无转动时所发生的形状变化，就称为切形变。即流体质点线之间**夹角的相向改变率**

**表示**

**图示**

**方程描述** ① 不存在法形变 ② 存在切形变但不存在旋转

**推导**  根据上图，考虑，则有 和

进一步分析可得

最终有：

**（3）形变张量**

**描述**  实际上，速度的三个分量分别对三个坐标变量求微商，可以写成矩阵的形式

**形式**  形变张量与对称矩阵

对角线：法形变

**推导**  ，

其中

## 补充例题

1. (a为常数)，求流线和迹线。

① ，则不可使用该形式。应说：流动是一维的，流线方程仅沿x方向，dy=0,dz=0

所以流线方程为 （平行于x轴，若绘图注意方向）

② 由，积分得，此即为迹线方程形式。表示沿着平行于x轴的一条直线

2. 已知流场求流线方程，并作图表示。

有 因为流线随t变化，所以在不同时刻，有不同的形式。

因此，取几个时刻表示。例如

